

**УСТАНОВЛЕНИЕ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ
СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
С НАЛОЖЕННЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ:
ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ЧИСЕЛ ПРАНДТЛЯ**

©2010 г. О.М.Подвигина

*Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики РАН, г. Москва*

Изучено установление конвекции в горизонтальном слое проводящей несжимаемой жидкости с жесткими диэлектрическими границами, подогреваемом снизу и вращающемся относительно вертикальной оси, с наложенным вертикальным магнитным полем в приближении Буссинеска. В зависимости от величин параметров задачи (чисел Тейлора, Чандрасекара, кинематического и магнитного чисел Прандтля) потеря устойчивости состояния покоя при увеличении числа Рэлея может происходить с развитием монотонной или колебательной неустойчивости. Конвективные валы, появляющиеся при монотонной неустойчивости, сами также неустойчивы, если число Тейлора достаточно велико (имеет место так называемая неустойчивость Кюпперса-Лорца). В данной работе исследовано, как критическое значение числа Рэлея, тип неустойчивости состояния покоя и критическое значение числа Тейлора для неустойчивости Кюпперса-Лорца зависят от кинематического и магнитного чисел Прандтля. Рассмотрены числа Прандтля не превосходящие 1, характерные для внешнего ядра Земли.

Ключевые слова: конвекция, числа Прандтля, магнитное поле, монотонная и колебательная неустойчивости, неустойчивость Кюпперса-Лорца

Согласно современным научным представлениям, источником магнитного поля Земли является конвективное движение во внешнем ядре. Подтверждением этой гипотезы служат, например, результаты серии работ Глатцмайера с соавторами (см. [Glatzmaier, 1997; Christensen, 1999] и приведенные там ссылки), которые численно решали систему уравнений, описывающую конвективные гидромагнитные явления. В этих расчетах удалось воспроизвести дипольную в основном морфологию магнитного поля Земли и его хаотические инверсии. Однако значения некоторых параметров, использованных в этих работах, на несколько порядков отличаются от их значений для ядра Земли, поэтому такое качественное соответствие результатов расчетов с реальным геодинамо следует “считать удивительным” [Jones, 2000]. В частности, расчеты проводили для значения чисел Прандтля порядка единицы, в то время как в расплавленном ядре кинематическое число Прандтля имеет порядок 10^{-3} , а магнитное – 10^{-8} [Анпоу, 2001]. Отметим также, что разные авторы дают различные оценки этих величин для ядра Земли, отличающиеся на несколько порядков (см. обсуждение этого вопроса в гл. 7 монографии [Merril, 1996]). Тем самым, представляет интерес исследовать, как изменяется характер поведения конвективных течений при изменении значений чисел Прандтля.

В настоящей статье задача о зависимости конвективных течений от кинематического и магнитного чисел Прандтля рассмотрена в наиболее простой постановке. Мы изучаем установление конвекции в горизонтальном слое проводящей жидкости, подогреваемом снизу и

вращающемся относительно вертикальной оси, с жесткими диэлектрическими горизонтальными границами, поддерживаемыми при фиксированных температурах, и с наложенным вертикальным магнитным полем. В безразмерной форме система характеризуется числами Рэлея R (относительная величина сил плавучести), Прандтля P (отношение кинематической вязкости к коэффициенту тепловой диффузии), магнитного Прандтля P_m (отношение кинематической вязкости к коэффициенту магнитной диффузии), Тейлора Ta (квадратный корень из которого пропорционален скорости вращения) и Чандрасекара Q (квадратный корень из которого пропорционален интенсивности магнитного поля).

При малых числах Рэлея жидкость неподвижна. При увеличении числа Рэлея выше некоторой критической величины возникает течение жидкости. При отсутствии и вращения, и магнитного поля имеет место монотонная неустойчивость состояния покоя жидкости [Chandrasekhar, 1961; Гершуни 1972; Гетлинг, 1991], возникающее течение двумерно и имеет вид валов. При наличии магнитного поля, в зависимости от величины отношения P_m/P , возможен качественный различный характер возникающей неустойчивости [Подвигина, 2009; Podvigina, 2010]. Если $P_m < P$ (это соотношение выполнено для величин параметров во внешнем земном ядре, и в данной статье рассмотрен этот случай), при малых значениях Ta при установлении конвекции возникают устойчивые валы. При больших значениях числа Тейлора, возникающие валы неустойчивы относительно возмущений, представляющих собой такое же течение, повернутое на некоторый угол относительно вертикальной оси. При отсутствии магнитного поля эту неустойчивость (ее называют неустойчивостью Кюпперса-Лорца) исследовали Küppers and Lortz [1969] и Clune and

Knobloch [1993]. При дальнейшем увеличении скорости вращения монотонная неустойчивость состояния покоя сменяется колебательной.

В статье рассмотрены числа Прандтля на интервалах $10^{-3} \leq P \leq 1$ и $10^{-8} \leq P_m \leq 1$. Тем самым, минимальные значения приблизительно отвечают значениям параметров во внешнем ядре Земли, а максимальные – используемым при численном моделировании происходящих там процессов. Наши расчеты проведены для чисел Тейлора и Чандрасекара, не превышающих 10^{10} и $2 \cdot 10^4$, соответственно, а в земном ядре этих величины $\sim 10^{24}$ и $\sim 10^{10}$ [Aurnou, 2001]. Однако, как отмечал еще Chandrasekhar [1961], при $Ta \rightarrow \infty$ и $Q \rightarrow \infty$ поведение системы носит асимптотический характер, и потому экстремально большие значения этих параметров не представляют интереса. Численно исследована зависимость критического числа Рэлея, типа неустойчивости состояния покоя, критических значений числа Тейлора и угла неустойчивости Кюпперса-Лорца от чисел Прандтля. Для большого числа рассмотренных случаев изменение одного из чисел Прандтля на порядок или несколько порядков приводит к незначительным изменениям рассматриваемых критических значений. Тем самым, система несущественно зависит от чисел Прандтля, что, возможно, объясняет качественное сходство магнитного поля, полученного в упомянутых численных экспериментах, с магнитным полем Земли. (Отметим принципиальные сложности, связанные с тем, что, с одной стороны, проводить расчеты с достаточным разрешением при значениях параметров, соответствующих условиям во внешнем ядре Земли, существующий уровень развития вычислительной техники не позволяет, а с другой, достаточно детальное сравнение результатов расчетов с геомагнитным полем невозможно из-за недостаточности информации о структуре магнитного поля.) Наши

результаты показывают, что ошибки в оценках этих параметров могут быть несущественными.

1. Уравнения и параметры

Эволюция конвективного течения и магнитного поля описывается уравнениями Навье-Стокса, теплопроводности и магнитной индукции. В безразмерном виде они имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = & \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + P\Delta \mathbf{v} + PR\theta \mathbf{e}_z - \nabla p \\ & + PTa^{1/2} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z + P^2 P_m^{-1} Q(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\theta + v_z + \Delta \theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + PP_m^{-1} \Delta \mathbf{B} \quad (3)$$

Поле скорости и магнитное поле бездивергентны:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (4)$$

В этих уравнениях \mathbf{v} – скорость потока, θ – разность между температурой и ее линейным профилем, устанавливающимся в слое в состоянии покоя, \mathbf{b} – разность между магнитным полем и его постоянной вертикальной составляющей, $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z + \mathbf{b}$, \mathbf{e}_z – единичный вектор вдоль вертикальной оси z . На горизонтальных границах выполнено условие прилипания и фиксированы температуры:

$$v_x = v_y = v_z = 0, \quad \theta = 0 \quad (z = \pm \frac{1}{2}) \quad (5)$$

Считаем, что внешняя среда за пределами слоя – изолятор, т.е. магнитное поле на границе равно градиенту гармонической функции,

определенной в соответствующем полупространстве [Chandrasekhar, 1961]:

$$\mathbf{b}(z) = \nabla\phi(z) \quad (z = \pm\frac{1}{2}) \quad (6)$$

$$\Delta\phi = 0 \quad (|z| > \frac{1}{2}), \quad \phi \rightarrow 0 \quad (|z| \rightarrow \infty)$$

Безразмерные параметры определяются следующими соотношениями:

$$P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad P_m = \frac{\nu}{\mu}, \quad R = \frac{\alpha g d^3}{\nu \kappa} \delta T, \quad Ta = \left(\frac{2\Omega d^2}{\nu}\right)^2, \quad Q = \frac{\sigma B_0^2 d^2}{\rho \nu}$$

Здесь ν – кинематическая вязкость, κ – коэффициент термической диффузии, μ – коэффициент магнитной диффузии, α – коэффициент термического расширения, g – ускорение свободного падения, d – толщина слоя, δT – разность температур между верхней и нижней границами, Ω – скорость вращения, σ – коэффициент электропроводности, B_0 – интенсивность внешнего магнитного поля, ρ – плотность жидкости.

2. Устойчивость состояния покоя

Устойчивость стационарного состояния ($\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{b} = 0$, $\theta = 0$) (жидкость неподвижна) определяется собственными значениями оператора линеаризации (1)–(3). Стационарное состояние становится неустойчивым, когда собственное значение этого оператора пересекает мнимую ось.

Вычисление критических значений следует методу, впервые использованному в [Pellew, 1940] для расчета критических значений Рэлея состояния равновесия жидкости в горизонтальном слое без вращения и магнитного поля и примененного в [Clune, 1993; Weeks, 2002; Zhang, 2004] для конвективной системы с вращением и/или магнит-

ным полем. Для фиксированных параметров (P , P_m , Ta и Q) критическую моду ищем в виде конечной суммы произведений тригонометрических функций и экспонент с неизвестными коэффициентами. Подставляя эту сумму в линеаризованные уравнения конвекции, теплопроводности и магнитной индукции и в граничные условия, получим систему уравнений (она выведена в [Podvigina, 2010]), из которой находим критическое число Рэлея $R_c(k)$ и частоту (для колебательной неустойчивости), зависящие от k – горизонтального волнового числа критической моды. Из-за сложности этих уравнений, систему решаем численно. Определяя минимум $R_c(k)$ по k и сравнивая значения для разных типов неустойчивости, находим тип критической моды, частота ω_c (для колебательной неустойчивости) и критическое значение R_{cr} для данных P , P_m , T и Q .

Зависимости $R_c^s(k)$ и $R_c^o(k)$ (критические значения чисел Рэлея для монотонной и колебательной неустойчивостей, соответственно) от k при $Ta = 10^6$, $Q = 100$ и нескольких значениях P и P_m показаны на рис. 1. При данном k , для монотонной неустойчивости $R_c^s(k)$ зависит только от Ta и Q , для колебательной $R_c^o(k)$ также зависит от чисел Прандтля. Колебательная неустойчивость возможна при достаточно малых P , $R_c^o(k)$ растёт с ростом числа Прандтля и убывает с ростом магнитного числа Прандтля. Для малых P и P_m эта зависимость оказывается весьма слабой. Например, на рис. 1а графики, соответствующие $P_m = 10^{-3}$ и $P_m = 10^{-8}$, зрительно неразличимы. На рис. 1б графики, отвечающие $P = 10^{-2}$ и $P_m = 10^{-3}$, также отличаются несущественно. Слабость зависимости характерна для всех рассмотренных значениях Ta и Q (а именно, $Ta = 2.5 \cdot 10^5, 1000, 2000$ и $Q = 200, 500, 2000, 5000$).

Зависимость R_{cr} от P_m для нескольких значений Q показана на

рис. 2а, при этих значениях параметров имеет место колебательная неустойчивость состояния покоя. В диапазоне $10^{-6} \leq P_m \leq 10^{-2}$ (т.е. при $P_m \leq P$) изменения R_c^o незначительны, эта величина меняется существенно только при P_m порядка 0.1. При небольших P , R_{cr} также зависит от P слабо (см. рис. 2б). Горизонтальные отрезки графиков (правая часть рассмотренного интервала P) отвечают монотонной неустойчивости (т.е. изображают R_{cr}^s), а их продолжения слева – колебательной (т.е. левые фрагменты графиков изображают R_{cr}^o). Известно [Chandrasekhar, 1961], что R_{cr}^s убывает с ростом Q при больших Ta и малых Q ; для колебательной неустойчивости имеет место обратная зависимость от Q (см. рис. 2б).

Зависимость R_{cr} и ω_{cr} от Ta показана на рис. 3 для нескольких значений Q и P_m . Монотонная неустойчивость сменяется колебательной при достаточно больших числах Тейлора. Отметим, что графики, отвечающие P_m , отличающимся на шесть порядков, – 10^{-8} и $5 \cdot 10^{-3}$ – зрительно неразличимы. При больших Ta зависимости R_{cr} и ω_{cr} выходят на асимптотический режим поведения.

3. Неустойчивость Кюпперса-Лорца

Для вычисления критических значений Ta и угла между осями возмущаемых валов и возмущением, α , применен метод [Podvigina, 2010], основанный на использовании амплитудных уравнений, аналогичный примененному в [Clune, 1993] для исследования устойчивости валов во вращающемся слое. В горизонтальной плоскости предполагается, что векторы периодов системы возмущенных валов и возмущения образуют ромбическую ячейку периодичности с углом α . Используя методы теории динамических систем (а именно, ограничение на центральное многообразие), можно вычислить коэффициенты амплитудных уравнений. Валы устойчивы относительно возму-

щений, отвечающих некоторому α , если для этого α коэффициенты амплитудных уравнений удовлетворяют определенным неравенствам (см. [Podvigina, 2010]). Если эти неравенства выполнены для всех α , $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, то конвективные валы устойчивы относительно возмущений рассматриваемого типа.

Расчеты проведены для $Q = 5, 50, 500$ и 5000 с шагом $\pi/500$ по α . Типичная зависимость Ta_c и α_c от числа Прандтля показана на рис. 4. При достаточно малых P_m эта зависимость такая же, как и во вращающемся слое без внешнего магнитного поля: эти величины строго положительны и монотонно растут с ростом P . При бóльших P_m поведение иное, неустойчивость может иметь место уже при $Ta = 0$. Однако для $P_m < P$ (напомним, что для геофизических приложений представляет интерес именно этот случай) зависимость от P_m незначительна.

Заключение

Результаты приведенных выше расчетов показывают, что в рассмотренных диапазонах значений параметров ($0.001 \leq P \leq 1$, $10^{-8} \leq P_m \leq 1$, $P_m < P$) степень зависимости критических параметров (числа Рэлея и частоты при колебательной неустойчивости состояния покоя, числа Тейлора и угла для неустойчивости Кюпперса-Лорца) от магнитного числа Прандтля крайне мала. Как правило, изменение P_m на 5-7 порядков влечет изменение критических значений менее чем на 1%. Для достаточно малых P зависимость от этого параметра незначительна: так, при уменьшении P от 0.01 до 0.001 критические значения меняются несущественно.

Эти результаты указывают на существование асимптотических режимов при $P \rightarrow 0$ и $P_m \rightarrow 0$, малость коэффициентов асимптотических рядов и ненулевой радиус их сходимости. (Построение асимпто-

тических разложений выходит за рамки настоящей статьи.)

Отметим, что уравнения, геометрия, величины чисел Рэлея, Тейлора и Чандрасекара рассмотренной задачи отличны от условий Земли, и, таким образом, изученные в данной статье магнитогидродинамические конвективные режимы отличны от реализующихся в геофизических конвективных системах. Однако наблюдаемые зависимости от чисел Прандтля имеют достаточно общий характер, поскольку выполняются во всех рассмотренных нами случаях; эта универсальность дает основания полагать, что нечувствительность магнитогидродинамических конвективных режимов может сохраниться и при величинах параметров и режимах, характеризующих условия Земли.

Работа поддержана грантами ANR-07-BLAN-0235 OTARIE Агентства национальных исследований Франции и 07-01-92217-НЦНИЛ_а РФФИ.

Список литературы

Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

Гетлинг А.В. Формирование пространственных структур конвекции Рэлея–Бенара // Успехи физ. наук. 1991. Т. 161 N 9. С. 1–80.

Подвигина О.М. Конвективная устойчивость вращающегося слоя проводящей жидкости во внешнем магнитном поле // Изв. РАН. МЖГ 2009. N. 4. 29–39.

Aurnou J.M., Olson P.L. Experiments on Rayleigh-Bénard convection, magnetoconvection and rotating magnetoconvection in liquid gallium // J. Fluid Mech. 2001. V. 430. 283–307.

Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Claredon Press, 1961. 652 с.

Christensen U., Olson P., Glatzmaier G.A. Numerical modelling of the geodynamo: a systematic parameter study // Geophys. J. Int. 1999. V. 138. P. 393–409.

Clune T., Knobloch E. Pattern selection in rotating convection with experimental boundary conditions // Phys. Rev. E. 1993. V. 47. N. 4. P. 2536–2550.

Jones C.A. Convection-driven geodynamo models // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 2000. V. A358. P. 873–897.

Glatzmaier G.A., Roberts P.H. Simulating the geodynamo // Contemp. Phys. 1997. V. 38. P. 269–288.

Küppers G., Lortz D. Transition from laminar convection to thermal turbulence in a rotating fluid layer // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. P. 609–620.

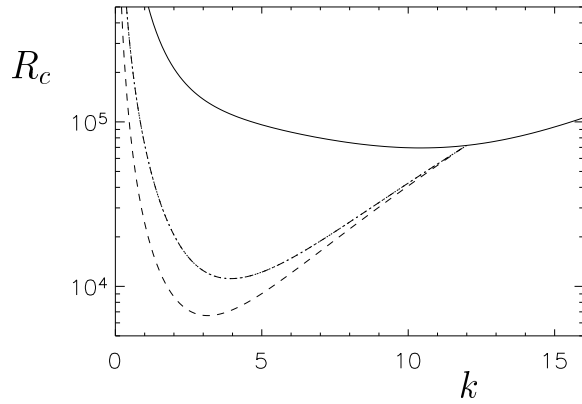
Merril R.T., McEllhiny M.W., McFadden Ph.L. The magnetic field of the Earth. Paleomagnetism, the core and the deep mantle. San Diego: Academic Press, 1996. 527 c.

Pellew A., Southwell R. V. On maintained convective motion in a fluid heated from below // Proc. Roy. Soc. London ser. A. 1940. V. 176. P. 312–343.

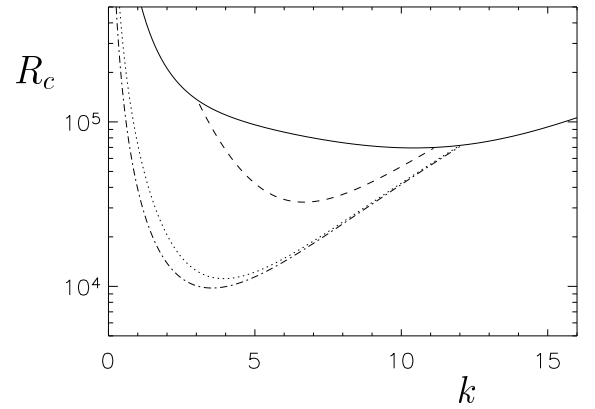
Podvigina O.M. Stability of rolls in rotating magnetoconvection in a layer with no-slip electrically insulating horizontal boundaries // Phys. Rev. E. 2010. V. 81. 056322. (20 pages.)

Weeks M., Zhang K. Thermal generation of Alfvén waves in oscillatory magnetoconvection: diffusively modified modes // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 2002. V. 96. P. 405–424.

Zhang K., Weeks M., Roberts P.H. Effect of electrically conducting walls on rotating magnetoconvection // Phys. Fluids. 2004. V. 16. N 6 P. 2023–2032.

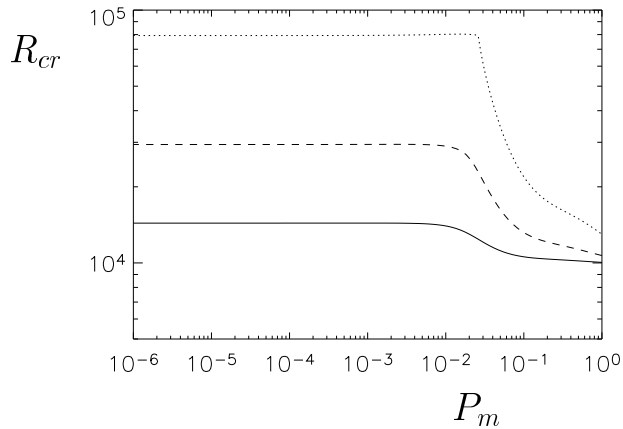


(a)

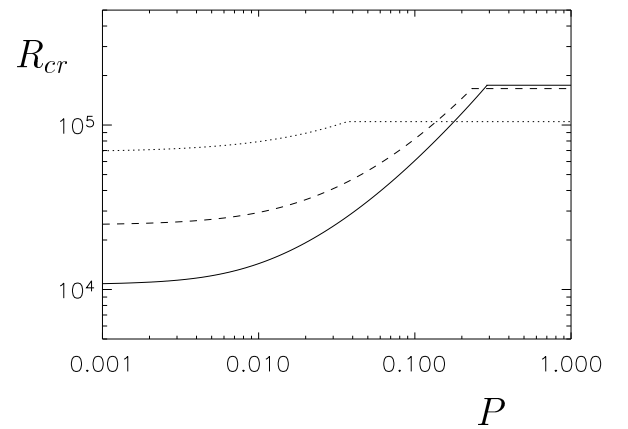


(б)

Рис. 1: Зависимость критического числа Рэлея R_c от горизонтального волнового числа нейтральной моды k при $Ta = 10^6$, $Q = 100$: (а) $P = 0.01$, $P_m = 0.1$ (штриховая линия), $P_m = 10^{-3}$ (пунктир), $P_m = 10^{-8}$ (штрих-пунктир); (б) $P_m = 10^{-4}$, $P = 0.1$ (штриховая линия), $P = 0.01$ (пунктир), $P = 10^{-3}$ (штрих-пунктир). Сплошная линия – стационарная мода, пунктир, штриховая линия и штрих-пунктир – осциллирующая.

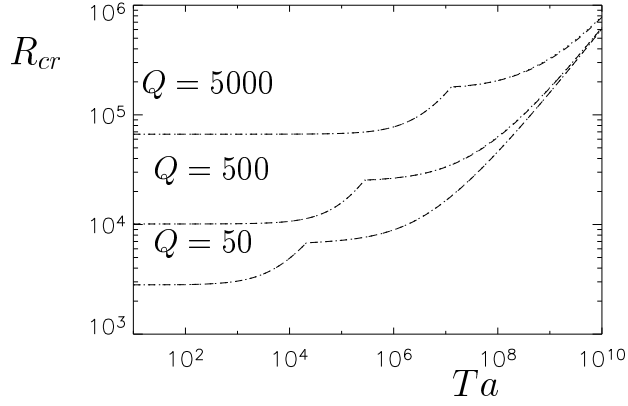


(a)

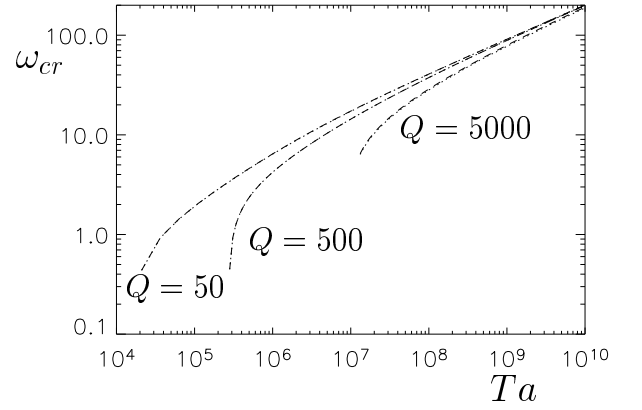


(б)

Рис. 2: Зависимость критического числа Рэлея R_{cr} от магнитного (а) и кинематического (б) чисел Прандтля при $Ta = 4 \cdot 10^6$ и $Q = 100$ (сплошная линия), 500 (штриховая), 2000 (пунктир): (а) $P = 0.01$, (б) $P_m = 10^{-4}$.

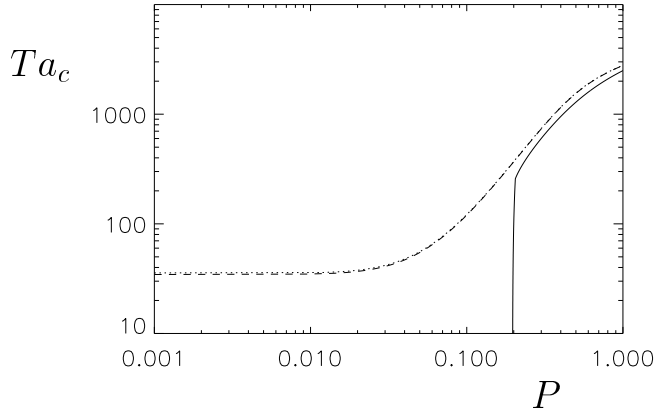


(a)

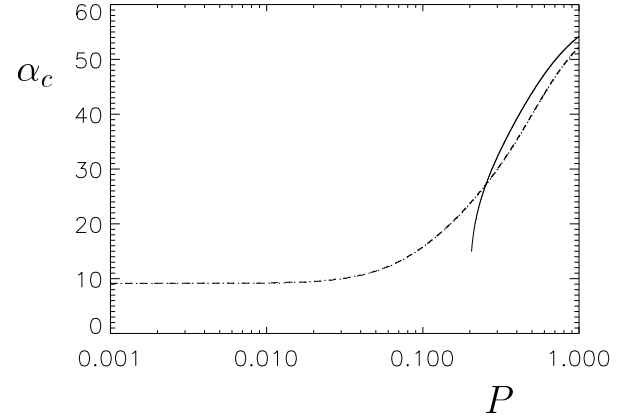


(б)

Рис. 3: Зависимость критического числа Рэлея R_{cr} (а) и частоты ω_{cr} (б) от числа Тейлора для $P = 0.01$ и трех величин Q при $P_m = 5 \cdot 10^{-8}$ (пунктир) и $P_m = 10^{-8}$ (штриховая линия).



(a)



(б)

Рис. 4: Зависимость критического числа Тейлора Ta_c (а) и угла α_c (б) от числа Прандтля для $Q = 500$, $P_m = 0.1$ (сплошная линия), $P_m = 10^{-2}$ (пунктир) и $P_m = 10^{-8}$ (штриховая линия).